Математическая мозаика

В данном разделе пособия помещена небольшая подборка развивающих задач, которые могут быть использованы как на уроках математики, так и во внеурочной деятельности школьников. Представленные задания, охватывают только часть всевозможных вопросов и упражнений развивающего характера и условно распределены на три рубрики: числовой калейдоскоп, геометрическая викторина, математические софизмы.

3.1 Числовой калейдоскоп

112. На какое число нужно разделить 2, чтобы получить 4?

113. К данному трехзначному числу дважды приписывают точно такое же число и полученное число делят на данное. Каким будет частное?

114. Вычислите сумму цифр всех чисел от 1 до 100 (включительно).

115. Если из одной стопки тетрадей переложить в другую 10 штук, то тетрадей в стопках будет поровну. На сколько в одной стопке было больше тетрадей, чем в другой?

116. Товарный поезд имеет длину в 1 км и движется со скоростью 50 км/ч. За какое время он пройдет тоннель длиной 1 км?

117. За книгу заплатили 60 руб. и еще $\frac{1}{3}$ стоимости ее. Сколько стоила эта книга?

118. Восстановите запись сложения (одинаковые буквы соответствуют одинаковым цифрам):

a) $$\begin{array}{r} \text{УДАР} \\ +\ \text{УДАР} \\ \hline \text{ДРАКА} \end{array}$$

b) $$\begin{array}{r} \text{МОРЕ} \\ +\ \text{ШТОРМ} \\ \hline \text{АВАРИЯ} \end{array}$$

c) $$\begin{array}{r} \text{ВАГОН} \\ +\ \text{ВАГОН} \\ +\ \text{ВАГОН} \\ \hline \text{СОСТАВ} \end{array}$$

d) $$\begin{array}{r} \text{ЦВЕТОК} \\ +\ \text{ЦВЕТОК} \\ +\ \text{ЦВЕТОК} \\ \hline \text{БУКЕТИК} \end{array}$$

e) $ГОД + ГОД + ГОД + ГОД + ГОД = ИТОГ$

119. В приведенных примерах восстановите отмеченные звездочками отсутствующие цифры:

a)
$$\begin{array}{r} -\;6*5* \\ *8*4 \\ \hline 2856 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} 27 \\ \times\;\;** \\ \hline 5* \\ +\;** \\ \hline 8** \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{r|l} -\;*8*** & *** \\ \cline{2-2} 3*8 & *** \\ \hline -\;1058 & \\ **** & \\ \hline -\;*** & \\ 504 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

120. Какой цифрой оканчивается сумма: $126^6 + 234^6 + 16^6$?

121. Запишите с помощью трех девяток наибольшее число.

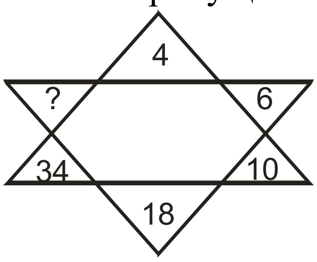
122. Напишите наименьшее трехзначное число, кратное 3, так, чтобы первая цифра его была 8 и все цифры были бы различны.

123. Делится ли число $7^{77} + 1$ на 5?

124. Запишите, пользуясь тремя пятерками и знаками действий, числовое выражение равное: a) 0; b) 2; c) 1.

125. На какие числа делятся без остатка следующие числа: 777; 666; 555; 444; 333; 222; 111?

126. Вставьте пропущенное число:

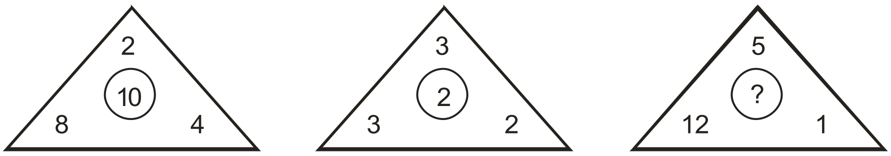


a)

b) 17 (102) 12

14 (?) 11

c) 1 5 13 29 ?

d) 

3.2 Геометрическая викторина

127. Одна из диагоналей ромба равна его стороне. Какие углы имеет этот ромб?

128. Могут ли быть перпендикулярными радиус и хорда, проведенные из одной и той же точки окружности?

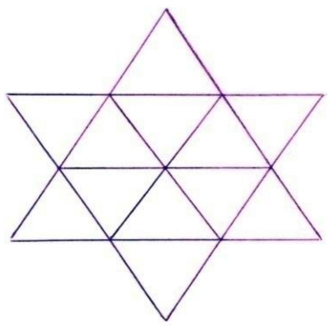
129. Один из углов равнобедренного треугольника содержит 38°. Какой этот треугольник: остроугольный или тупоугольный?

130. Квадрат со стороной 1 дм отрезками разделен на 100 равных квадратов. Какой длины получится отрезок, если распрямить всю сетку, образованную сторонами квадратов?

131. Диаметр полуокружности разделен на три отрезка, неравных между собой по длине. На каждом отрезке как на диаметре построена полуокружность. Сравните длину данной полуокружности с суммой длин трех полуокружностей, построенных на частях диаметра.

132. Дан квадрат со стороной 10 см. В него вписан второй квадрат так, что вершинами его служат средние точки сторон первого. В получившийся квадрат таким же образом вписан третий квадрат. Вычислите периметр и площадь третьего квадрата.

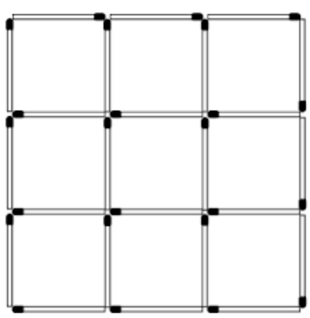
133. Сколько треугольников изображено на рисунке?



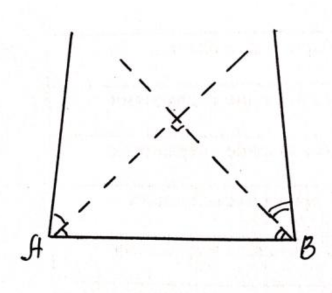
134. Как разместить: а) 8 кружков на четырех равных отрезках так, чтобы на каждом из них лежало по 3 кружка; б) 12 кружков на 6 равных отрезках – по 4 кружка.

135. Строительный кирпич весит 4 кг. Сколько весит маленький кирпичик, изготовленный из того же материала, все размеры которого в 4 раза меньше?

136. Сколько получится острых углов, если в данном остром угле провести из его вершины 3 луча?



137. Снимите 4 спички так, чтобы осталось 3 малых квадрата и один большой.
138. Лист согнули пополам. Полученный кусок бумаги еще раз согнули пополам. Такое сгибание выполнили 6 раз. Распрямив лист бумаги, его разрезали по местам сгибов. Сколько всего получилось листочков?
139. Прямоугольник и квадрат имеют одинаковый периметр. У какой фигуры больше площадь?
140. На рисунке пунктиром проведены биссектрисы углов при основании треугольника. Они пересекаются под прямым углом. Чему равна высота треугольника, если его основание равно 10 см?



141. Из вершины квадрата со сторонами 3 см требуется провести два отрезка, делящих квадрат на 3 равновеликие части.

3.3 Математические софизмы

Софизм – это умышленно ложное умозаключение, кажущееся правильным, но содержащее одну или несколько замаскированных ошибок.

В истории развития математики софизмы играют значимую роль, способствуя повышению строгости математических рассуждений и более глубокому осмыслению понятий и методов математики. Действительно, разбор софизмов развивает логическое мышление, наблюдательность, вдумчивость, критическое отношение к изучаемому материалу. Софизмы очень поучительны и интересны. Обнаружить ошибку в софизме – это значит осознать ее, а осознание ошибки предупреждает от повторения ее в других математических рассуждениях. Наконец, разбор софизмов – увлекательный процесс, и чем труднее софизм, тем большее удовлетворение доставляет постижение истины.

142. $\mathbf{2 \cdot 2 = 5.}$
Найдите ошибку в следующих рассуждениях.
a) Имеем числовое равенство: $4:4 = 5:5$. Вынесем за скобки в каждой части равенства общий множитель. Получим: $4(1:1) = 5(1:1)$. Числа в скобках равны, поэтому 4=5, или $2 \cdot 2 = 5$.
b) Обозначим: $4 = a,\ 5 = b,\ \frac{a+b}{2} = d$. Имеем: $a + b = 2d,\ a = 2d - b$, $2d - a = b$. Перемножим два последних равенства по частям. Получим:

$2da-a^2=2db-b^2$. Умножим обе части получившегося равенства на -1 и прибавим к результатам d^2. Будем иметь: $a^2-2da+d^2=b^2-2bd+d^2$, или $(a-d)^2=(b-d)^2$, откуда $a-d=b-d$ и $a=b$, т.е. $2\cdot 2=5$. Где допущена ошибка?

143. $\mathbf{1=2.}$

Где ошибка в следующей цепочке следствий из верного утверждения: $1-3=4-6$, $1-3+\frac{9}{4}=4-6+\frac{9}{4}$, $\left(1-\frac{3}{2}\right)^2=\left(2-\frac{3}{2}\right)^2$, $\sqrt{\left(1-\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(2-\frac{3}{2}\right)^2}$, $1-\frac{3}{2}=2-\frac{3}{2}$, $1=2$?

144. **Все числа равны между собой**. Пусть $a\neq b$. Возьмем тождество: $a^2-2ab+b^2=b^2-2ab+a^2$. Имеем: $(a-b)^2=(b-a)^2$. Отсюда $a-b=b-a$, или $2a=2b$, а значит, $a=b$. В чем ошибка?

145. **Квадрат любого числа равен 1.** Пусть m – какое угодно число. Обозначим: $x=y=\frac{m^4}{4}$. Имеем: $x-\sqrt{x}=y-\sqrt{y}$, или $x-y=\sqrt{x}-\sqrt{y}$ что можно переписать так: $(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})=\sqrt{x}-\sqrt{y}$. Из полученного равенства находим:$\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$. Следовательно, $2\sqrt{x}=1$, но $x=\frac{m^4}{4}$, и поэтому $2\sqrt{\frac{m^4}{4}}=1$, или $m^2=1$. Где ошибка?

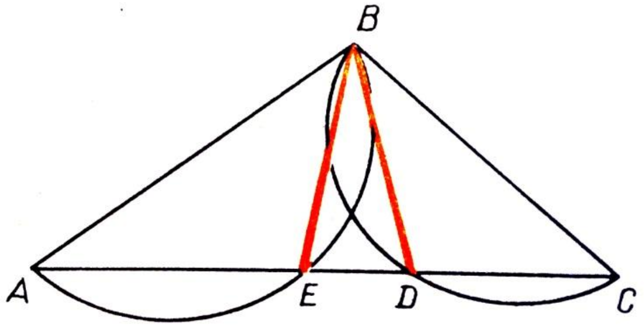
146. **Отрицательное число больше положительного.** Возьмем два положительных числа a и b. Сравним два отношения: $\frac{a}{-b}$ и $\frac{-a}{b}$. Они равны, так как каждое из них равно $-\frac{a}{b}$. Можем составить пропорцию: $\frac{a}{-b}=\frac{-a}{b}$. Но если в пропорции предыдущий член первого отношения больше последующего, то предыдущий член второго отношения также больше своего последующего. В нашем случае $a>-b$, следовательно, должно быть $-a>b$, т.е. отрицательное число больше положительного. В чем ошибка?

147. **Расстояние от Земли до Солнца равно толщине волоска.** Где мы ошиблись? Пусть $a(m)$ – расстояние от Земли до Солнца, а $b(m)$ – толщина волоска. Среднее арифметическое их обозначим через v. Имеем: $a+b=2v$, $a=2v-b$, $a-2v=-b$. Перемножим по частям два последних равенства, получаем: $a^2-2av=b^2-2bv$. Прибавим к каждой части v^2. Получим: $a^2-2av+v^2=b^2-2bv+v^2$, или $(a-v)^2=(b-v)^2$, т.е. $(a-v)=(b-v)$, и значит, $a=b$.

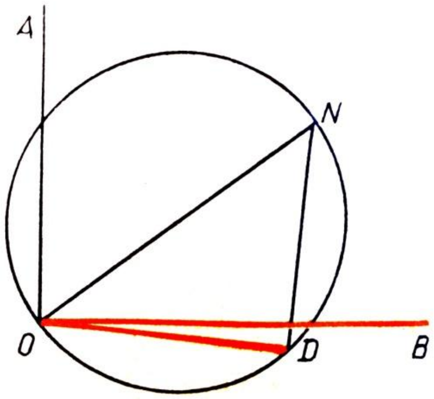
148. **Спичка вдвое длиннее телеграфного столба.** Пусть a – длина спички (дм) и b – длина столба (дм). Разность между b и a обозначим через c. Имеем: $b-a=c$, $b=a+c$. Перемножая два эти равенства по частям находим: $b^2-ab=ca+c^2$. Вычтем из обеих частей bc. Получим: $b^2-ab-bc=ca+c^2-bc$, или $b(b-a-c)=-c(b-a-c)$, откуда $b=-c$, но $c=b-a$, поэтому $b=a-b$, или $a=2b$.

149. **Из точки на прямую можно опустить два перпендикуляра.**

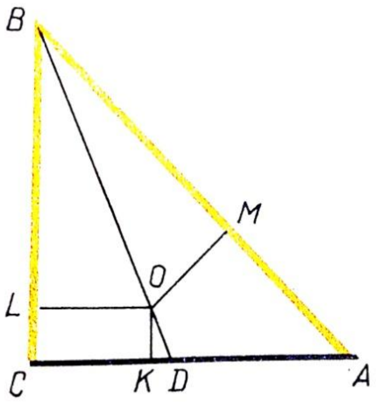
a) Попытаемся «доказать», что через точку, лежащую вне прямой, к этой прямой можно провести два перпендикуляра. С этой целью возьмем треугольник ABC (рис.). На сторонах AB и BC этого треугольника, как на диаметрах, построим полуокружности. Пусть эти полуокружности пересекаются со стороной AC в точках E и D. Соединим точки E и D прямыми с точкой B. Угол AEB прямой, как вписанный, опирающийся на диаметр; угол BDC также прямой. Следовательно, $BE \perp AC$ и $BD \perp AC$. Через точку B проходят два перпендикуляра к прямой AC. В чем ошибка?



b) (лежащие с ней в одной плоскости). Найдите ошибку в таком «доказательстве». Возьмем прямой угол AOB. Через вершину O проведем внутри угла произвольный луч и на нем от точки O отложим произвольный отрезок ON. Из середины этого отрезка, как центра, опишем окружность, проходящую через точки O и N. Проведем через точку N прямую, параллельную AO. Пусть эта прямая пересекает окружность в точке D. Соединим отрезком точки O и D. Угол ODN, как вписанный, опирающийся на диаметр, прямой, а т.к. $ND \| AO$, то угол DOA тоже прямой. Следовательно, $OB \perp AO$ и $OD \perp AO$.

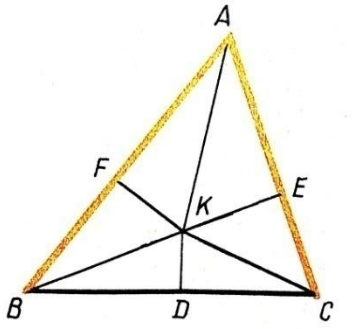


150. **Катет равен гипотенузе.** $\angle C = 90°$, BD – биссектриса $\angle CBA$. $CK = KA$, $OK \perp CA$, O – точка пересечения прямых OK и BD, $OM \perp AB$, $OL \perp BC$. Имеем: $\Delta LBO = \Delta MBO$, $BL = BM$, $OM = OL = CK = KA$, $\Delta KOA = \Delta OMA$ (OA – общая сторона, $KA = OM$, $\angle OKA = \angle OMA = 90°$) $\angle OAK = \angle MOA$, $OK = MA = CL$, $BA = BM + MA$, $BC = BL + LC$, но $BM = BL$, $MA = CL$, и поэтому $BA = BC$. Где ошибка?



151. **Всякий треугольник равнобедренный.** Пусть ABC – произвольный треугольник. Проведем биссектрису угла A и перпендикуляр к стороне BC, прохо-

дящий через ее середину D. Может оказаться так, что точка пересечения биссектрисы и перпендикуляра (точка K) будет лежать внутри треугольника ABC. Опустим из точки K перпендикуляры KE и KF на стороны AC и AB. Имеем: $\triangle AEK = \triangle AFK$, а значит, $KE = KF$ и $AE = AF$. Треугольники BKD и CKD также равны, а поэтому $KB = KC$. Остается рассмотреть прямоугольные треугольники BKF и CKE. Они равны, так как $KE = KF$ и $KB = KC$. Из равенства этих треугольников вытекает, что $EC = FB$. Возьмем теперь два равенства: $AE = AF$ и $CE = BF$. Сложив их по частям, получаем: $AC = AB$. Аналогично можно провести рассуждения в случае, если точка K будет лежать вне треугольника ABC. Рассуждения в случае, если точка K будет лежать на стороне BC (совпадает с D), также не сложны. Во всех этих случаях приходим к выводу, что треугольник ABC равнобедренный. Значит, любой треугольник равнобедренный. Где ошибка?

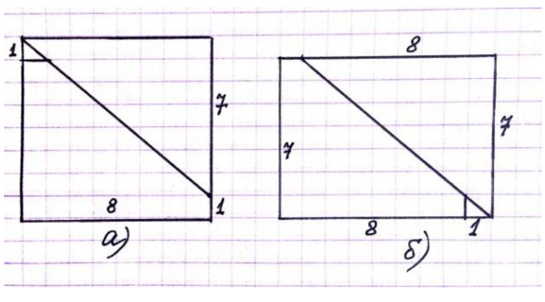


152. Ученик следующим образом выполнил сокращение дроби, получив верный результат.

$$\frac{\overset{y}{\cancel{y^2}} - \overset{2}{\cancel{4}}}{\cancel{y+2}} = \frac{y-2}{1} = y-2$$

Правильно ли выполнено сокращение?

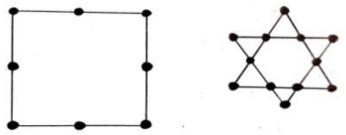
153. Еще один софизм. Вот еще один «фокус», который можно сделать с квадратом. Возьмем квадрат со стороной 8 см и следовательно, с площадью 64 см^2. Разрежем его на три части так, как показано на рисунке а). Затем переложим эти части так, как показано на рисунке б). Получается прямоугольник, площадь которого «легко вычислить». 7см×9см=63см^2. В чем же дело?



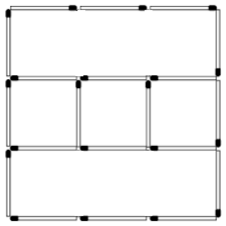
Ответы, указания, решения

112. $\frac{1}{2}$.
113. 1001001.
114. 901.
115. На 20 тетрадей.
116. За 2,4 мин.
117. 90 руб.
118.
a) Д=1, А=2, Р=6, У=8, К=5.
b) А=1, Ш=9, В=0. Если Р<6, то это четная цифра; при Р>5 – нечетная. Испытания Р дают: 3625+97623=101248.
c) 94183+94183+94183=282549.
d) $\overline{\text{ЕТ}}$=50 или 49, первое не годится т.к. А=0 или 5. Поэтому 834970+834970+834970=2504910.
e) 549+549+549+549+549=2745.
119.
a) 6750-3894
b) 27·32
c) 48384:126
120. 3.
121. 9^{9^9}
122. 801.
123. Не делится.
124. a) (5-5)·5; b) (5+5):5; c) $\left(\frac{5}{5}\right)^5$.
125. 3, 111,37 (т.к. 37·3=111).
126. a) 66. Если двигаться по часовой стрелке, то каждое последующее число равно удвоенному предыдущему минус 2.
b) 77. Число в скобках равно половине произведения чисел, стоящих вне скобок.
c) 61. Каждое последующее число равно сумме предыдущего с удвоенной разностью двух предшествующих. Так, $5-1=4$, $4\cdot 2=8$, 5+8=13 и т.д.
d) 8. Число внутри кружка равно сумме чисел внутри нижних углов треугольника минус число, стоящее в верхнем углу треугольника.
127. $60°,\ 120°,\ 60°,\ 120°$.
128. Нет.
129. Остроугольный или тупоугольный.
130. 2,2 м.
131. Равны.
132. Периметр 20 см, площадь 25 см^2.
133. 20.

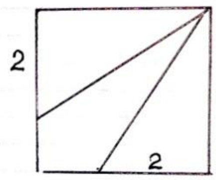
134.



135. $4000 : 64 = 62{,}5$ (г).
136. 10.
137.



138. 64.
139. Квадрат.
140. Высота равна бесконечности. Углы A и B в сумме составляют 90°. Углы при основании треугольника ($2A+2B$) в сумме составляют 180°. Следовательно, угол при вершине треугольника должен равняться 0°, а боковые стороны параллельны и пересекаются в бесконечности.
141.



142.
a) Ошибка допущена в вынесении общего множителя за скобки в левой и правой частях тождества $4 : 4 = 5 : 5$.
b) $(a-d)^2 = (b-d)^2 \Leftrightarrow |a-d| = |b-d|$
143. $\left(1-\frac{3}{2}\right)^2 = \left(2-\frac{3}{2}\right)^2$ следует не $1-\frac{3}{2} = 2-\frac{3}{2}$, а $-1+\frac{3}{2} = 2-\frac{3}{2}$. Всегда $\sqrt{a^2} = |a|$.
144. $(a-b)^2 = (b-a)^2 \Leftrightarrow |a-b| = |b-a|$
145. Деление на $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ недопустимо, так как $x = y$, и поэтому $\sqrt{x}-\sqrt{y} = 0$.
146. Свойство: если в пропорции предыдущей член первого отношения больше последующего, то и предыдущий член первого отношения больше своего последующего – может оказаться неверным, если некоторые члены пропорции отрицательны.
147. $(a-v)^2 = (b-v)^2 \Leftrightarrow |a-v| = |b-v|$
148. Нельзя делить на $b-a-c$, так как $b-a-c = 0$.
149.

a) Рассуждения опирались на ошибочный чертеж. В действительности полуокружности пересекаются со стороной AC в одной точке, т.е. BE совпадает с BD.
b) $D \in OB$.
150. Ошибочен чертеж. Точка пересечения прямой, определяемой биссектрисой BD и серединного перпендикуляра к катету AC, находится вне треугольника ABC.
151. Ошибочен чертеж.
153. Дело в том, что маленький прямоугольный треугольник не будет равнобедренным. Один из его катетов равен 1 см, а другой, как легко сосчитать, равен $\frac{8}{7}$ см. Длина основания прямоугольника равняется не 9, а $8\text{ см} + \frac{8}{7}\text{ см} = 9\frac{1}{7}$ см, а его площадь $7\text{см} \cdot 9\frac{1}{7}\text{см} = 64\text{см}^2$. Противоречия не получается.